



Provas de Acesso ao Ensino Superior
Concurso Especial de Acesso e Ingresso do Estudante Internacional

PROVA MODELO DE MATEMÁTICA

Tempo para realização da prova: 2 horas

Tolerância: 30 minutos

Material admitido: *material de escrita e calculadora científica sem capacidade gráfica*

INDICAÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

Apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efetuar e todas as justificações que considerar necessárias.

A avaliação incidirá sobre a qualidade das justificações, o rigor dos cálculos apresentados e a precisão dos resultados.

Nas aproximações numéricas, quando necessárias, deve ser usada a aproximação às centésimas.

Será atribuída a cotação de 0 (zero) valores às respostas com letra ilegível.

GRELHA DE COTAÇÃO DA PROVA

QUESTÕES	COTAÇÃO (valores)
1.	3
2.	3
3.	4
4.	3
5.	4
6.	3
Total	20

FORMULÁRIO

<p><u>GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO</u></p> <p>Perímetro de um círculo: $2\pi r$ (r – raio)</p> <p>Área de um sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)</p> <p>Área de um polígono regular: <i>Semiperímetro</i> \times <i>Apótema</i></p> <p>Área de um paralelogramo: <i>Base</i> \times <i>Altura</i></p> <p>Área de um trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$</p> <p>Volume de um prisma e de um cilindro: <i>Área da base</i> \times <i>Altura</i></p> <p>Volume de uma pirâmide e de um cone: $\frac{Área\ da\ base \times Altura}{3}$</p> <p>Volume de uma esfera: $\frac{4\pi r^3}{3}$ (r – raio)</p>	<p><u>FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL</u></p> <p>Regras de derivação:</p> <p>$(u \pm v)' = u' \pm v'$</p> <p>$(u v)' = u' v + u v'$</p> <p>$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$</p> <p>$(\sin u)' = u' \cos u$</p> <p>$(\cos u)' = -u' \sin u$</p> <p>$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$</p> <p>$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)</p> <p>$(e^u)' = u' e^u$</p> <p>$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)</p> <p>$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$</p> <p>$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)</p>
<p><u>NÚMEROS COMPLEXOS</u></p> <p>Potenciação: $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$</p> <p>Radiciação: $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)</p>	<p>Limites notáveis:</p> <p>$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)</p>
<p><u>SUCESÕES DE NÚMEROS REAIS</u></p> <p>Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (u_n): $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$</p> <p>Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n): $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$</p>	<p>Fórmula resolvente de uma equação do 2.º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$:</p> $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
<p><u>ESTATÍSTICA</u></p> <p>Soma dos quadrados dos desvios em relação à média:</p> $SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$	<p>Desvio padrão:</p> $S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$
<p>Percentil de ordem k (dados simples):</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Se $k = 100$, $P_k =$ valor máximo da amostra; ○ Se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100} \in \mathbb{Z}$, $P_k = \frac{x_{\left(\frac{kn}{100}\right)} + x_{\left(\frac{kn}{100} + 1\right)}}{2}$; ○ Nos restantes casos, $P_k = x_{\left\lfloor \frac{kn}{100} \right\rfloor + 1}$, onde $\left\lfloor \frac{kn}{100} \right\rfloor$ representa a parte inteira de $\frac{kn}{100}$. 	<p>Coeficiente de correlação linear:</p> $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}}$
<p>Reta dos mínimos quadrados $y = ax + b$:</p> $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x} \quad e \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$	

1. Considere os números complexos que se seguem:

$$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad z_2 = 7e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{e} \quad z_3 = 2e^{i\theta}.$$

1.1. Escreva z_1 na forma trigonométrica.

1.2. Determine uma expressão geral para os valores de θ para os quais $z_2 \times z_3$ é um número real negativo.

2. Considere as duas sucessões que se seguem:

$$100, 200, 300, \dots \quad \text{e} \quad 100, 110, 121, \dots.$$

2.1. Indique, justificando, qual das sucessões é uma progressão aritmética e qual é uma progressão geométrica.

2.2. Compare o crescimento das duas sucessões, justificando, qual delas cresce mais depressa.

2.3. Calcule a soma dos primeiros 60 termos de cada sucessão.

3. Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\ln x), & \text{se } x \geq 1 \\ x^4 - 2x^2 + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

3.1. Verifique se a função f é contínua em $x = 1$.

3.2. Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos da função f no intervalo $] -\infty, 1[$.

3.3. Estude o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão do gráfico da função f no intervalo $] -\infty, 1[$.

4. Considere, num referencial o.n., o triângulo de vértices A(3,8), B(2,1) e C(7,6).

4.1. Classifique o triângulo quanto à medida de comprimento dos lados e calcule o seu perímetro.

4.2. Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A e B.

5. De entre os 30 melhores alunos da Escola Secundária “Ases da Matemática”, 10 por cada ano de escolaridade, será escolhida, ao acaso, uma comissão de 4 alunos que irá representar a escola nos “Jogos sem Fronteiras da Matemática”. Calcule a probabilidade de:

5.1. A comissão ter um, e um só, aluno do 10.º ano;

5.2. Cada ano de escolaridade (10.º, 11.º e 12.º) estar representado na comissão;

5.3. A comissão ter no máximo dois alunos do 12.º ano.

6. Vinte e cinco alunos da turma II do 12.º ano da Escola Secundária “Ases da Matemática” foram submetidos a um teste para avaliar os conhecimentos adquiridos sobre o tema Estatística. As classificações obtidas, arredondadas às unidades, foram as seguintes:

16 12 15 14 15 20 11 18 18 13 12 13 11
14 15 13 15 14 14 15 18 17 20 11 19

6.1. Construa uma tabela de distribuição de frequências para as classificações, onde figure as frequências absolutas, as frequências relativas e as frequências relativas acumuladas.

6.2. Qual é a percentagem de alunos que obtiveram uma classificação inferior ou igual a 18 e superior a 15?

6.3. Determine a média e o desvio padrão, com aproximação às centésimas, das classificações.

6.4. Determine os quartis das classificações.